Apellido: .... Nombre: .... Legajo: ....

1er Parcial de **MATEMATICA SUPERIOR**

1 de octubre de 2012

TEMA: **27 A**

1			2		3			4	5	Nota Final
1	1	0.5	1	1.5	1	0.5	1.5	2	2	

LA NOTA ES N = X – 2 SIENDO X LA SUMA DE PUNTOS. TIEMPO: 120 MINUTOS

Ejercicio 1:

a) Halle el conjunto de complejos que verifican: $z^2 - (4j - 1)\,z - 3 - 3j = 0$

b) Grafique el conjunto de complejos que verifican: $\mathrm{Re}(z^2) + 3\,|z|^2 \leq N$ siendo N la cantidad de raíces primitivas de orden 24 de la unidad real.

c) Halle la intersección de los dos conjuntos anteriores.

Ejercicio 2: Sea la señal: $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 < t < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < t < 2 \\ 2 & \text{si } 2 < t < 4 \end{cases} \wedge f(t) = f(t+6)$

a) Considere $g(t) = f(t) - 2$ e indique si g tiene simetría de media onda. Justifique.

b) Desarrolle f(t) en Serie Trigonométrica de Fourier.

Ejercicio 3:

Dada la transferencia de un sistema: $G(s) = \dfrac{5s^3 - 45s}{(s+1)(s-3)(s^2+10s+26)}$

a) Indique si el sistema es estable. Justifique.

b) Grafique aproximadamente el corte de $|\,G(s)\,|$ con el eje real.

c) Halle la respuesta del sistema a la entrada: $x(t) = e^{-3t}(1-2t)$

Ejercicio 4:

Halle el valor de: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-6t}}{t}\,dt$ utilizando Transformada de Laplace.

Ejercicio 5:

Resuelva utilizando transformada Z: $x(n+2) + x(n+1) - 2\,x(n) = 6$ con $x(0)=2 \wedge x(1) = 13$

RESPUESTAS PARCIAL 1 TEMA 27 A:

Ejercicio 1: a) Resolviendo con la fórmula se llega a: $z_1 = -1 + j$ $z_2 = 3j$

b) N = 8 (los coprimos con 24 son: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23) $\Rightarrow$ $Re(z^2) + 3\,|z|^2 \leq 8$

$\Rightarrow x^2 - y^2 + 3\,(x^2 + y^2) \leq 8 \Rightarrow 4x^2 + 2y^2 \leq 8 \Rightarrow x^2/2 + y^2/4 \leq 1$ elipse con centro en (0,0) , semieje mayor en eje y: a=2 y semieje menor en eje x: b=$\sqrt{2}$)

c) La intersección de los dos conjuntos anteriores es solamente un complejo: { -1 + j }

Ejercicio 2: a) g NO tiene simetría de media onda, pues g(-0.5)=-1, y g(-0.5+3)=g(2.5)=0 $\neq$ 1

b) Como f(t) = g(t) + 2 , podemos hallar el desarrollo en STF de g(t) y luego sumarle la constante 2. Por ser g impar, solamente calculamos los b_n.

$$b_n = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \int_0^2 \operatorname{sen}(n\,\pi/3\ t)\,dt = \frac{2}{n\pi} \cdot (1 - \cos(\frac{2}{3}n\pi)) \Rightarrow Sf(t) = 2 + \sum \frac{2}{n\pi} \cdot (1 - \cos(\frac{2}{3}n\pi)) \cdot \operatorname{sen}(n\frac{\pi}{3}t)$$

Ejercicio 3: a) $G(s) = \dfrac{5s^3 - 45s}{(s+1)(s-3)(s^2+10s+26)} = \dfrac{5s(s-3)(s+3)}{(s+1)(s-3)(s^2+10s+26)} = \dfrac{5s(s+3)}{(s+1)(s^2+10s+26)}$

Hay polos en -5+j, -5-j y -1, todos en el semiplano izquierdo $\Rightarrow$ es estable.

b) Por tener polos en -5+j, -5-j y -1, un cero en el origen, un cero en -3 y cero en infinito, la gráfica aproximada de | G(s) | por el eje real tendrá un máximo relativo en -5, cero en -3, una asíntota vertical en -1, cero en el origen y tanto en + ∞ como en - ∞ tiende a cero.

c) Recordemos que la salida Y(s) es: Y(s) = G(s) $\bullet$ X(s)

Como $x(t) = e^{-3t}(1-2t) \Rightarrow X(s) = \dfrac{1}{s+3} - \dfrac{2}{(s+3)^2} = \dfrac{s+3-2}{(s+3)^2} = \dfrac{s+1}{(s+3)^2}$

$$Y(s) = \frac{5s(s+3)}{(s+1)(s^2+10s+26)} \bullet \frac{s+1}{(s+3)^2} = \frac{5s}{(s+3)(s^2+10s+26)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+10s+26}$$

Se obtiene: A = -3 ; B = 3 ; C = 26 $\Rightarrow Y(s) = -3\,\dfrac{1}{s+3} + \dfrac{3(s+5)+26-15}{(s+5)^2+1}$

$$\Rightarrow Y(s)\ -3\,\frac{1}{s+3} + \frac{3(s+5)}{(s+5)^2+1} + \frac{11}{(s+5)^2+1} \Rightarrow \boxed{y(t) = -3\,e^{-3t} + 3\cos(t)\,e^{-5t} + 11\operatorname{sen}(t)\,e^{-5t}}$$

Ejercicio 4: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-2t} - e^{-6t}}{t}\,dt = \ln(3)$ (Es el ejercicio 14.6 de la guía de T.P.)

Ejercicio 5: $z^2\,(X(z) - 2 - 13/z) + z\,(X(z) - 2) - 2\,X(z) = 6\dfrac{z}{z-1}$

$z^2 X(z) - 2z^2 - 13z + z\,X(z) - 2z - 2\,X(z) = 6\dfrac{z}{z-1} \Rightarrow X(z)\,(z^2 + z - 2) = 6\dfrac{z}{z-1} + 2z^2 + 15z \Rightarrow$

$$X(z)\,(z-1)(z+2) = \frac{6z + 2z^2(z-1) + 15z(z-1)}{z-1} \Rightarrow X(z) = \frac{z(2z^2+13z-9)}{(z-1)^2(z+2)} = z\,(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z+2})$$

Resolviendo se llega a: A = 5 ; B = 2 ; C = -3

$X(z) = 5\,\dfrac{z}{z-1} + 2\dfrac{z}{(z-1)^2} - 3\,\dfrac{z}{z+2}$ Antitransformando: $\boxed{x(n) = 5 + 2\,n - 3\,(-2)^n}$

Mat. Superior 1° parcial

tema 27A

1° Oct 2012

EJ 1

a) Halle el conjunto de complejos que verifican: $z^2-(4j-1)z-3-3j=0$

$a=1$; $b=-(-1+4j)$; $c=-3-3j$

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-1+4j)\pm\sqrt{(1-4j)^2-4(-3-3j)}}{2}=\frac{-1+4j\pm\sqrt{-3+4j}}{2}=\frac{-1+4j+w_{1,2}}{2}$$

$$w^2=-3+4j\ \xrightarrow[|w|=5]{x=-3}\ w_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5+(-3)}{2}}\pm\sqrt{\frac{5-(-3)}{2}}\,j \quad \begin{cases} w_1=1+2j \\ w_2=-1-2j\end{cases}$$

$$z_1=\frac{-1+4j+w_1}{2}=\frac{\cancel{-1}+4j+\cancel{1}+2j}{2}=\boxed{3j=z_1}\ ✓$$

$$z_2=\frac{-1+4j+w_2}{2}=\frac{-1+4j-1-2j}{2}=\boxed{-1+j=z_2}\ ✓$$

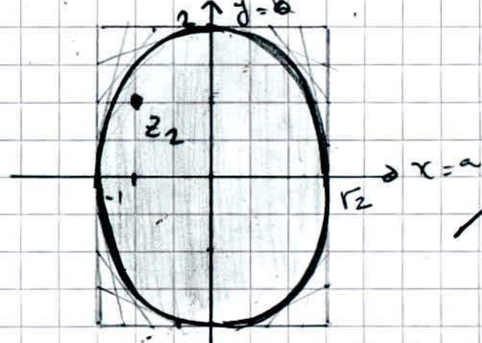
b) Grafique el conjunto de complejos que verifican: $Re(z^2)+3|z|^2\leq N$ siendo N la cantidad de raíces primitivas de orden 24 de la unidad real.

Raíces primitivas de orden 24: $w_1, w_5, w_7, w_{11}, w_{13}, w_{17}, w_{19}, w_{23}\rightarrow\boxed{N=8}$

- $z=a+bj\rightarrow z^2=a^2+2abj-b^2\rightarrow\boxed{Re(z^2)=a^2-b^2}$
- $|z|^2=\sqrt{a^2+b^2}^{\,2}=a^2+b^2$

$\rightarrow Re(z^2)+3|z|^2=a^2-b^2+3(a^2+b^2)=a^2-b^2+3a^2+3b^2=4a^2+2b^2\leq 8$

$\rightarrow \dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{4}\leq 1$ → elipse centro $\bar{0}$ con semiejes:
en $x=\sqrt{2}$
en $y=2$



c) Halle la intersección de los dos conj ant.

El único punto de a) que cumple b) es z_2

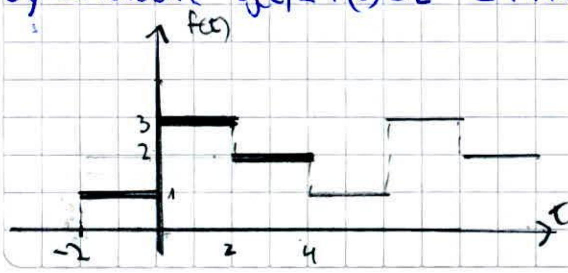
$\boxed{z_2=-1+j}$ ✓

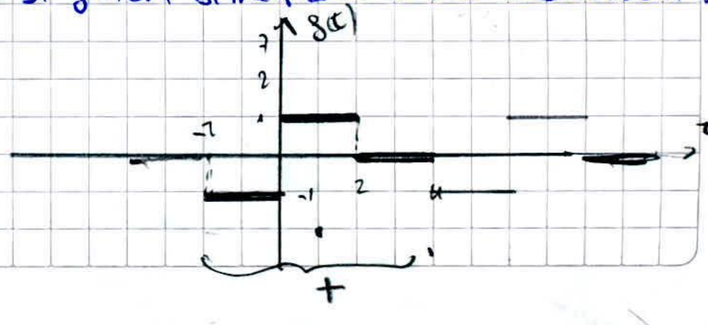
z_1 queda afuera de la elipse

EJ 2 Sea la señal:

$$f(t)=\begin{cases}1 & si\ -2<t<0\\ 3 & si\ 0<t<2\\ 2 & si\ 2<t<4\end{cases} \quad \wedge\ f(t)=f(t+6)$$

a) Considere $g(t)=f(t)-2$ e indique si g tiene simetría de media onda. Justif.





$$g(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [-2,0] \\ 1 & \text{si } t \in [0,2] \\ 0 & \text{si } t \in [2,4] \end{cases}$$

$g(-0{,}5) = -1$

$g(-0{,}5+3) \overset{?}{=} 1\ ?\ ,\ g(-0{,}5+3) = 0 \neq 1$

No tiene simetría de media onda

b) Desarrolle $f(t)$ en Serie trigonométrica de Fourier

$f(t) = g(t) - 2$

$\boxed{\frac{a_0}{2} = 2}$

$g(t)$ es una función impar $\to$ función con senos $\to f$

↳ hallo b_n p/ g ↳ $a_n = 0$

$T = 6 \to L = 3 \to \omega = \frac{\pi}{3}$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(t)\, \text{sen}(n\omega t)\, dt = \frac{1}{3}\, 2\int_0^2 1\, \text{sen}\left(n\frac{\pi}{3}t\right) dt = \frac{2}{3}\left(-\frac{\cos(n\pi/3\, t)}{n\pi/3}\Big|_0^2\right) =$$

$$= -\frac{2\,\cancel{3}}{3 n\pi}\left[\cos\left(n\frac{2}{3}\pi\right) - 1\right] \to \boxed{Sf_{(t)} = 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3n\pi}\left(1 - \cos\left(n\frac{2}{3}\pi\right)\right) \text{sen}\left(n\frac{\pi}{3}t\right)}$$ ✓

$\boxed{\text{EJ 3}}$ Dada la transferencia de un sistema: $G(s) = \dfrac{5s^3 - 45s}{(s+1)(s-3)(s^2+10s+26)}$

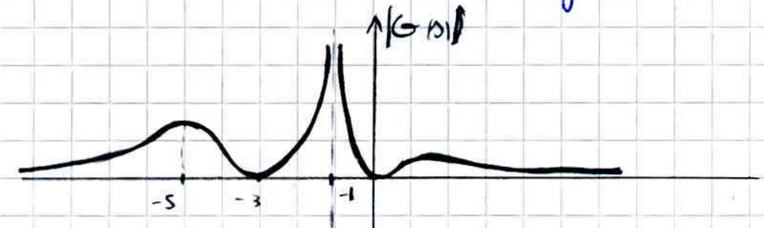
a) Indique si el sistema es estable. Justifique

$$G(s) = \frac{5s\,\cancel{(s-3)}(s+3)}{(s+1)\cancel{(s-3)}\left[(s+5)^2+1\right]}$$

$\to$ ceros: 0; -3; ∞

polos: -1; $-5+j$; $-5-j$. $\to$ todos los polos tienen sus partes reales negativas $\to$ $\boxed{\text{ES ESTABLE}}$ ✓

b) Grafique, aproximadamente el corte de $|G(s)|$ con el eje real



c) Halle la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = e^{-3t}(1-2t)$

$$x(t) = e^{-3t} - 2te^{-3t} \to X(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{2}{(s+3)^2} = \frac{s+3-2}{(s+3)^2} = \frac{s+1}{(s+3)^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,.\,X(s) = \frac{5s\,\cancel{(s+3)}}{\cancel{(s+1)}\left[(s+5)^2+1\right]} \cdot \frac{\cancel{s+1}}{(s+3)^{\cancel{2}}} = \frac{5s}{(s^2+10s+26)(s+3)} = \frac{As+B}{(s^2+10s+26)} + \frac{C}{s+3}$$

$$\to A(s^2+3s) + B(s+3) + C(s^2+10s+26) = 5s$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 3A + B + 10C = 5 \\ 3B + 26C = 0 \end{cases} \to \begin{matrix} A = 3 \\ B = 26 \\ C = -3 \end{matrix} \to Y(s) = \frac{3s+26}{(s+5)^2+1} - \frac{3}{s+3} = \frac{\overbrace{3s+15}^{3(s+5)}}{(s+5)^2+1} + \frac{11}{(s+5)^2+1} - \frac{3}{s+3}$$

$$\boxed{y(t) = e^{-5t}\left(3\cos(t) + 11\,\text{sen}(t)\right) - 3e^{-3t}}$$ ✓

Tema 27A
1/10/12

EJ 4 Halle el valor de $\int_0^\infty \frac{e^{-2t}-e^{-6t}}{t}\,dt$ utilizando transf de Laplace.

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt \rightarrow \int_0^\infty e^{-2t}\,\frac{(1-e^{-4t})}{t}\,dt \rightarrow \text{hallo: } F(2)$$

$$f(t)=\frac{1-e^{-4t}}{t}=\frac{y(t)}{t} \rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+4}$$

$$\hookrightarrow F(s)=\int_s^\infty Y(u)\,du=\int_s^\infty \frac{1}{u}-\frac{1}{u+4}\,du=\ln(u)-\ln(u+4)\Big|_s^\infty=$$

$$=\ln\left(\frac{u}{u+4}\right)\Big|_s^\infty=\lim \ln\left(\overset{\to 1}{\frac{u}{u+4}}\right)-\ln\left(\frac{s}{s+4}\right)=0-\ln\left(\frac{s}{s+4}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{s+4}{s}\right)$$

$$F(s)=\ln\left(\frac{s+4}{s}\right) \rightarrow F(2)=\ln\left(\frac{6}{2}\right)=\ln(3)$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{e^{-2t}-e^{-6t}}{t}\,dt=\ln(3)}$$

EJ 5 Resuelva utilizando transformada Z:

$$x(n+2)+x(n+1)-2x(n)=6 \qquad \text{con } x(0)=2 \wedge x(1)=13$$

$$z^2\left[X(z)-x(0)-\frac{x(1)}{z}\right]+z\left[X(z)-x(0)\right]-2X(z)=\frac{6z}{z-1}$$

$$z^2X(z)-2z^2-13z+zX(z)-2z-2X(z)=\frac{6z}{z-1}$$

$$X(z)\left(z^2+z-2\right)=\frac{6z}{z-1}+2z^2+15z=\frac{6z+2z^3-2z^2+15z^2-15z}{z-1}$$

$$X(z)=z\left[\frac{2z^2+13z-9}{(z-1)^2(z+2)}\right]=z\left[\frac{A}{(z-1)}+\frac{B}{(z-1)^2}+\frac{C}{(z+2)}\right]$$

$$A(z^2+z-2)+B(z+2)+C(z^2-2z+1)=2z^2+13z-9$$

$$\begin{cases} A+C=2 \\ A+B-2C=13 \\ -2A+2B+C=-9 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} A=5 \\ B=2 \\ C=-3 \end{matrix} \rightarrow Y(s)=\frac{5z}{z-1}+\frac{2z}{(z-1)^2}-\frac{3z}{z+2}$$

$$\boxed{y(t)=5+2n-3\cdot(-2)^n}$$